ВІДКРИТИЙ ОБЛАСНИЙ ТУРНІР «ЕВРИКА -2019»
Дослідницька олімпіада з математики

1.Кусково-лінійні функції.

Будемо називати функцію $f(x)$ кусково-лінійною на відрізку $[a;b]$, якщо функція визначена у кожній точці цього відрізку та існують числа $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, такі, що $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ та на кожному інтервалі (t_i, t_{i+1}) $f(x) = k_i x + b_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Очевидно, що кожна лінійна функція є кусково-лінійною.

1.1Покажіть, що функція $y = \big||x| - 1\big|$ є кусково-лінійною на відрізку $[-2; 2]$.

1.2 У прикладі 1.1 графіком функції є деяка ламана. Наведіть приклад кусково-лінійних функцій на деякому відрізку, графіком яких не буде ламана.

1.3 Доведіть, що якщо $f(x)$ та $g(x)$ – кусково-лінійні функції на відрізку $[a;b]$, то ї функція $cf(x) + dg(x)$ також кусково-лінійна на відрізку $[a;b]$. Тут c, d - деякі числа.

1.4 Чи можна знайти такий скінчений набір кусково-лінійних функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ на відрізку $[a;b]$, що для будь-якої кусково-лінійної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ існують дійсні числа $c_1, c_2, \dots, c_m$, що

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$$

для усіх x з відрізку $[a;b]$.

1.5 Доведіть, що існує кусково-лінійна функція $f(x)$ на відрізку $[-1;1]$. така, що $f\big(f(x)\big) = -x$ для усіх x з відрізку $[-1;1]$.

2.Вінні приймає рішення.

Медведик Вінні, у якого є один симетричний гральний кубик, вирішив жити в такий спосіб. Кожного разу, прокидаючись, він згідно деякій процедурі, приймає рішення їсти мед чи малину з ймовірностями p та $1-p$ відповідно. Запропонуйте процедуру прийняття рішень для Вінні, якщо

2.1 $p = 0{,}5$

2.2 $p = 0,(6)$

2.3 $p = \frac{31}{36}$

2.4 $p = \frac{2019}{3^{19}}$

2.5 p має належати інтервалу $\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2019^{2019}}; \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2019^{2019}}\right)$ (у Вінні багато вільного часу!)

3.Оптимальне управління капіталом.

Деяка організація, що опікується матеріальною допомогою юним талановитим математикам отримала у своє розпорядження стартовий капітал X_0. Організація розміщує цей капітал у банк, що дає $p\%$ річних. Організація може розпоряджатись лише прибутком капіталу після кожного року. А саме, на рахунку банка після року з номером n залишається сума

$$X_n = X_{n-1} + \lambda_{n-1}\frac{p}{100}X_{n-1},$$

а витрачається $(1-\lambda_{n-1})\frac{p}{100}X_{n-1}$ $(0 \le \lambda_i \le 1)$. Позначимо через F_n суму витрачених грошей за n років. Вона залежить від впорядкованого набору чисел $(\lambda_0;\ \lambda_1; \dots ; \lambda_{n-1})$. Мета організації – знайти такий набір чисел $(\lambda_0;\ \lambda_1; \dots ; \lambda_{n-1})$, щоб величина F_n була найбільшою.

Набір чисел $(\lambda_0;\ \lambda_1; \dots ; \lambda_{n-1})$, при якому величина F_n набуває найбільшого можливого значення називається оптимальним управлінням капіталом. Відомо, що справедливе таке твердження: *оптимальне управління капіталом існує.*

3.1 Виведіть формулу залежності X_n та F_n від $(\lambda_0;\ \lambda_1; \dots ; \lambda_{n-1})$, X_0 та p

3.2 Доведіть, що існує оптимальне управління $(\lambda_0;\ \lambda_1; \dots ; \lambda_{n-1})$, що складається лише з нулів та одиниць.

3.3 Доведіть, що оптимальне управління з нулів та одиниць має таку структуру: спочатку ідуть одиниці, а потім нулі.

3.4 Скільки одиниць містить оптимальне управління з попереднього пункту.

4.Маленькі числові світи.

У далеких закутках великого і безмежного Всесвіту жили маленькі планети, на яких діяли свої правила та закони. Однією з них була планета з назвою F_3.

На цій планеті користуються лише трьома незвичайними “числами” $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$. Числа можна додавати (операція«+», таблиця 1) та множити (операція «*», таблиця 2)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Таблиця 1.

*	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	2
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Таблиця 2.

Неважко переконатись, що для чисел планети F_3 справедливі такі відомі землянам закони

1.Сума та добуток довільних чисел F_3 є знову числом F_3

2.Для довільних чисел x, y, z з F_3 справедливі такі рівності:

$$x + (y + z) = (x + y) = z$$
$$x(yz) = (xy)z$$
$$x(y + z) = xy + xz$$
$$x + y = y + x$$
$$xy = yx$$

3. Існує число 0 таке що для довільного числа x з F_3
$$x + 0 = 0 + x = x$$

4. Існує число $1 \neq 0$ таке що для довільного числа x з F_3
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

5. Для довільного числа x з F_3 існує єдине число y з F_3 таке, що

$$x + y = y + x = 0,$$

(тобто визначено операцію віднімання, позначаємо $y = -x$)

6. Для довільного числа $x \neq 0$ з F_3 існує єдине число y з F_3 таке, що

$$xy = yx = 1,$$

(тобто визначено операцію ділення на ненульове число)

4.1 Для чисел з планети F_3 розв'яжіть рівняння

$$x^3 + x^2 + \bar{2}x - \bar{1} = \bar{0}$$

(відняти число t означає додати число $(-t)$)

4.2 Складіть таблицю додавання та множення для чисел планети F_2, якщо відомо, що на цій планеті усього два числа 0 та 1 та для них виконуються закони 1 – 6 та покажіть, що рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ не має розв'язків серед чисел планети F_2.

4.3 Для мешканців планети Земля багато років тому звичайне рівняння $x + 1 = 0$ не мало розв'язків серед відомих на той час людям чисел. Число (-1) було для них майже фантастичним. Так саме для мешканців планети F_2 є фантастичним деяке число α, таке, що $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ з точки зору арифметики планети F_2. Якщо мешканці планети F_2 приймуть у свою числову систему фантастичне число α, то яке число з планети F_2 буде дорівнювати добутку $\alpha(1 + \alpha)$?

4.4 Запропонуйте таблицю додавання та множення для чисел планети F_5, якщо відомо, що на цій планеті усього 5 чисел (серед них обов'язково числа 0 та 1) та для них виконуються закони 1 – 6.

4.5 Запропонуйте таблицю додавання та множення для чисел планети F_4, якщо відомо, що на цій планеті усього 4 числа (серед них обов'язково числа 0 та 1) та для них виконуються закони 1 – 6. Числа можете позначати в довільний спосіб.